MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope.* Note (*) de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Joseph Pérès.

Soit $\vec{u}$ le champ des vitesses d'un fluide parfait barotrope. On appelle îlot tourbillonnaire une portion de fluide sur la frontière de laquelle rot $\vec{u}$ est tangentiel ou nul. On montre que l'intégrale de $\vec{u}.\text{rot}\,\vec{u}$ sur un tel îlot reste constante au cours du mouvement; à cette intégrale s'en rattache une autre, ne dépendant que des valeurs de rot $\vec{u}$ sur l'îlot.

1. *La constante* H. — Soit, dans l'espace à trois dimensions, un fluide non visqueux, soumis à des forces de masse dérivant d'un potentiel et barotrope [relation $\rho = f(p)$ ou, en particulier, ρ constant]; le champ des accélérations $\vec{\gamma}$ est alors le gradient d'une fonction univoque q. Soit $\vec{u}$ le champ des vitesses; on sait que le rotationnel $\vec{\xi} = \text{rot}\,\vec{u}$ est transporté par le fluide selon la loi de Helmholtz :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\xi_i\right) = \frac{1}{\rho}\xi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Nous appelons *îlot tourbillonnaire* une portion D de fluide ayant pour frontière une surface régulière S *en chaque point de laquelle $\vec{\xi}$ est tangentiel ou nul.* Cette propriété se conserve au cours du temps. Nous nous limitons ici au cas où D est borné.

Au cours du mouvement de l'îlot tourbillonnaire D, *l'intégrale*

$$\mathrm{H} = \iiint_{\mathrm{D}} \vec{u}.\vec{\xi}\, d\tau$$

conserve une valeur constante (1).

En effet, le fluide transportant invariante la mesure $\rho\, d\tau$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{H}}{dt} &= \iiint_{\mathrm{D}} \left[\frac{1}{\rho}\xi_k\frac{du_k}{dt} + u_i\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\xi_i\right)\right]\rho\, d\tau = \iiint_{\mathrm{D}}\left(\xi_k\frac{\partial q}{\partial x_k} + u_i\xi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)d\tau \\ &= \iiint_{\mathrm{D}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\xi_k\left(q + \frac{u_i u_i}{2}\right)\right]d\tau = \iint_{\mathrm{S}}\left(q + \frac{u_i u_i}{2}\right)\xi_k\alpha_k\, d\sigma,\end{aligned}$$

et comme $\vec{\xi}$ est, sur S, orthogonal au vecteur unité normal $\vec{\alpha}$, cette dérivée est bien nulle.

2. *Autre expression de* H. — Le champ $\vec{u}$, sur D, peut être décomposé en la somme d'une vitesse $\vec{v}$, *induite par l'îlot* (intégrale de Biot-Savart de $\vec{\xi}$) et d'une *vitesse primitive* $\vec{w}$, irrotationnelle.

Si D est simplement connexe (ou peut être rendu tel par adjonction d'une portion irrotationnelle du fluide), $\vec{w}$ est, sur D, le gradient d'une fonction univoque φ, d'où

$$\iiint_D \vec{w}.\vec{\xi}\, d\tau = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\xi_i)\, d\tau = \iint_S \varphi\xi_i\alpha_i\, d\sigma = 0.$$

Dans ce cas, H se réduit donc au terme

$$K = \iiint_D \vec{v}.\vec{\xi}\, d\tau = \frac{1}{4\pi}\int^{(6)}_{D\times D} \vec{\xi}(x).\frac{\overrightarrow{xy}}{|\overrightarrow{xy}|^3}\times\vec{\xi}(y)\, d\tau_x\, d\tau_y$$

qui ne dépend pas de $\vec{w}$ mais uniquement des valeurs de $\vec{\xi}$ sur D.

Comme exemple d'îlot multiplement connexe, prenons D *homéomorphe à l'intérieur d'un tore*. Constituons un domaine simplement connexe D' en coupant D par une cloison Σ dont le bord Γ est homéomorphe à un cercle méridien du tore; le bord de D' est constitué de S et des deux faces Σ^+ et Σ^- de la cloison; sur D', le champ $\vec{w}$ est le gradient d'une fonction univoque φ. Un point x^- de Σ^- peut être joint dans D' au point x^+, en regard sur Σ^+, par une courbe équivalente pour $\vec{w}$ à un cycle C, tracé sur S (homéomorphe à un parallèle du tore); on a donc

$$\varphi(x^+) - \varphi(x^-) = \int_C \vec{w}.d\vec{x} = \int_C \vec{u}.d\vec{x} \quad \text{soit } a.$$

Par suite

$$\iiint_D \vec{w}.\vec{\xi}\, dx = \iint_{S+\Sigma^++\Sigma^-} \varphi\vec{\xi}.\vec{\alpha}\, d\sigma$$
$$= \iint_{\Sigma^+} [\varphi(x^+) - \varphi(x^-)]\vec{\xi}.\vec{\alpha}\, d\sigma = ab,$$

où l'on pose

$$b = \iint_{\Sigma^+} \vec{\xi}.\vec{\alpha}\, d\sigma = \int_\Gamma \vec{v}.d\vec{x} = \int_\Gamma \vec{u}.d\vec{x}.$$

Au cours du temps, les circulations a et b restent constantes, d'après le théorème de Kelvin; ainsi comme pour D simplement connexe, on obtient la conclusion :

K *reste constant au cours du mouvement de l'îlot* D.

3. *Cas d'une surface de glissement.* — Nous avons développé ailleurs [3] la théorie tourbillonnaire d'une *surface de glissement*, soit G, séparant deux portions F' et F'' d'un même fluide parfait barotrope; la discontinuité de vitesse $\vec{u}' - \vec{u}''$, sur G, est tangentielle. On introduit une couche fluide fictive G* qui évolue sur G avec la vitesse $\vec{u}^* = (\vec{u}' + \vec{u}'')/2$ et les résultats sont particulièrement simples dans le cas usuel où les valeurs $\vec{\xi}'$ et $\vec{\xi}''$ de $\vec{\xi}$, de part et d'autre de G, *sont tangentielles à* G *ou nulles* : les points essentiels de la théorie classique des tourbillons se transposent alors, en remplaçant la mesure vectorielle $\vec{\xi}\, d\tau$ par la mesure vectorielle $d\Xi = \vec{\alpha}\times(\vec{u}' - \vec{u}'')\, d\sigma$ qui se trouve transportée par G* selon la loi de Helmholtz ($\vec{\alpha}$ vecteur unité

normal à G). La présente théorie s'adapte à ce cadre : une portion Δ de la couche G^* sera qualifiée *îlot tourbillonnaire* si, sur la courbe qui constitue son bord, $d\vec{\Xi}$ est tangentiel ou nul, ou encore si ce bord est nul (Δ surface fermée); cette propriété se conserve au cours du temps. L'intégrale du paragraphe 1 est alors à remplacer par

$$H^* = \iint_{\Delta} \vec{u}^* . d\vec{\Xi} = \iint_{\Delta} (\vec{u}', \vec{u}'', \vec{\alpha})\, d\sigma$$

et *cette quantité conserve une valeur constante.* Il faut toutefois noter qu'avec l'hypothèse faite $(\vec{\xi}' . \vec{\alpha} = \vec{\xi}'' . \vec{\alpha} = 0)$, H est essentiellement nul si Δ est simplement connexe. Pour Δ multiplement connexe la valeur de H^* se relie aux circulations de $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$ sur des cycles de base, de sorte que l'invariance de H^* est un corollaire du théorème de Kelvin.

(*) Séance du 3 mai 1961.

(1) O. Bjorgum (*On Beltrami vector fields and flows*, Univ. Bergen Arbok. Naturvit. Rekke, 1951, n° 1), cité par C. Truesdell (*Math. Rev.*, 15, 1954, p. 569 et *The kinematics of vorticity*, Indiana University Press, Bloomington, Ind., U. S. A., 1954, p. 120) attire déjà l'attention sur cette intégrale, en remarquant que si $\vec{u}$ = grad h + f grad g (f, g, h : « potentiels de Monge », avec h univoque), H est essentiellement nul pour un îlot tourbillonnaire. Ce n'est évidemment pas le cas général; comme exemple d'îlot ayant un H non nul, nous proposons un système de deux anneaux tourbillonnaire de révolution, d'intensité respectives I_1 et I_2, *enlacés*, le tout plongé dans du fluide irrotationnel pour constituer un îlot D simplement connexe : on trouve alors $H = 2\, I_1\, I_2$.

(2) *Thèse*, Paris, 1949, p. 34 et *J. Math. pures et appl.*, 32, 1953, p. 12.

(*Faculté des Sciences, Montpellier.*)